Prof. *Ramus* meddeelte efterfølgende Bemærkninger om

Determinanternes Anvendelse til at bestemme Loven for de convergerende Bröker.

1. Af Størrelserne a^i_k, i Antal $(n+1)^2$, svarende til alle Combinationer af Indices i og k i Talrækken 0, 1, 2, ... n, dannes Determinanten R_n af Graden $n+1$, nemlig efter den sædvanlige Betegnelse

$$R_n = \Sigma \pm a a^1_1 \, a^2_2 \, \ldots \, a^n_n. \tag{1}$$

Den kan ordnes efter Størrelserne a^i, a^i_1, a^i_2, ... a^i_n, hvorved erholdes

$$R_n = a^i A^i + a^i_1 A^i_1 + a^i_2 A^i_2 \ . \ . \ . + a^i_n A^i_n, \tag{2}$$

idet Størrelserne A ere bestemte ved

$$\left.\begin{aligned} A^i_i &= \Sigma \pm a a^1_1 \ldots a^{i-1}_{i-1} \, a^{i+1}_{i+1} \ldots a^n_n, \\ A^i_k &= -\Sigma \pm a a^1_1 \ldots a^{i-1}_{i-1} \, a^k_i \, a^{i+1}_{i+1} \ldots a^{k-1}_{k-1} \, a^{k+1}_{k+1} \ldots a^n_n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

For et System af Ligninger af 1ste Grad

$$a^i y_0 + a^i_1 y_1 + a^i_2 y_2 \ldots + a^i_n y_n = u_i, \tag{4}$$

svarende til enhver af Værdierne $i = 0, 1, 2, \ldots n$, vil derefter ved Elimination erholdes

$$R_n y_r = A_r u + A^1_r u_1 + A^2_r u_2 \ldots + A^n_r u_n, \tag{5}$$

hvorved y_0, y_1, y_2, ... y_n alle blive bestemte. Ved blot at gaae ud fra disse bekjendte Sætninger*) vil man kunne fremstille Loven for Tæller og Nævner i en convergerende Brøk af hvilkensomhelst Index.

2. Antag forelagt en Kjædebrøk

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \text{etc.}}}},$$

*) S. De formatione et proprietatibus Determinantium, auct. *C. G. J. Jacobi* (Crelles Journal, 22de Bd. p. 285).

som kortere fremstilles ved

$$a_0, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots,$$

og de convergerende Brøker være fremstilte ved

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1}, \frac{y_1}{z_1} = a_0, \frac{b_1}{a_1}, \frac{y_2}{z_2} = a_0, \frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \text{ o. s. v,}$$

Man vil da have

$$y_0 = a_0, \; y_1 = a_0 a_1 + b_1, \; y_2 = a_0 a_1 a_2 + a_2 b_1 + a_0 b_2,$$
$$z_0 = 1, \; z_1 = a_2, \quad z_2 = a_1 a_2 + b_2,$$
$$y_3 = a_0 a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 b_1 + a_0 a_3 b_2 + a_0 a_1 b_3 + b_1 b_3,$$
$$z_3 = a_1 a_2 a_3 + a_3 b_2 + a_1 b_3,$$

o. s. v.; men det kommer herved blot an paa at finde Loven for den ene af disse to Rækker, efterdi f. Ex. z_n er det, hvortil y_{n-1} forandres, naar alle Indices ved a og b forhøies med en Enhed. Som bekjendt er y_r almindeligen bestemt ved de to foregaaende y_{r-1} og y_{r-2} formedelst

$$y_r = a_r y_{r-1} + b_r y_{r-2}, \tag{6}$$

og efter samme Lov er z_r bestemt ved z_{r-1} og z_{r-2}, saa at Værdierne af $y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots$, ligesom af $z_0, z_1, z_2. \ldots$, kunne successive bestemmes, naar Kjædebrøken er forelagt; men tillige haves ifølge Formlen (6), ved at tage successive $r = 0, 1, 2, \ldots n$, et System af Ligninger af Formen (4), hvorefter Udtrykket (5) giver en almindelig Bestemmelse for y_r. Coefficienterne

$$a^i, \; a^i_1, \; a^i_2, \ldots . a^i_n$$

ere bestemte efter følgende Schema, de successive horizontale Linier svarende til $i = 0, 1, 2, \ldots n$, medens de verticale fremstille Coefficienterne for de foroven skrevne $y_0, y_1, y_2, \ldots$:

y_0	y_1	y_2	y_3	…	y_{n-3}	y_{n-2}	y_{n-1}	y_n
1	0	0	0	…	0	0	0	0
$-a_1$	1	0	0	…	0	0	0	0
$-b_2$	$-a_2$	1	0	…	0	0	0	0
0	$-b_3$	$-a_3$	1	…	0	0	0	0
…	…	…	…	…	…	…	…	…
0	0	0	0	…	1	0	0	0
0	0	0	0	…	$-a_{n-2}$	1	0	0
0	0	0	0	…	$-b_{n-1}$	$-a_{n-1}$	1	0
0	0	0	0	…	0	$-b_n$	$-a_n$	1

Da $a^i_k = 0$ for alle Indices $k > i$, reduceres Determinanten til det enkelte Led

$$R_n = a a^1_1 a^2_2 \ldots a^n_n,$$

altsaa i nærværende Tilfælde $R_n = 1$. Tillige er ifølge (6) høire Side af Ligningerne, i Formlen (4) betegnede u, u_1, u_2, $\ldots u_n$, saaledes bestemte, at de to første have Værdierne

$$u = a_0, \quad u_1 = b_1,$$

men de følgende u_2, u_3, $\ldots u_n$ ere alle 0. Altsaa er ifølge (5)

$$y_n = a_0 A_n + b_1 A^1_n. \tag{7}$$

Det kommer altsaa alene an paa at bestemme A_n og A^1_n, nemlig

$$\left.\begin{array}{l} A_n = -\Sigma \pm a^n a^1_1 a^2_2 a^3_3 \ldots a^{n-1}_{n-1}, \\ A^1_n = -\Sigma \pm a \; a^n_1 a^2_2 a^3_3 \ldots a^{n-1}_{n-1}, \end{array}\right\} \tag{8}$$

ifølge den 2den (3), idet n er forskjellig fra 0 i A_n og forskjellig fra 1 i A^1_n. Særskilt bestemmes ifølge den 1ste (3)

$$A = 1, \quad A^1_1 = a. \tag{9}$$

Værdierne af a^i_k ere givne ved

$$a^i_{i-2} = -b_i, \quad a^i_{i-1} = -a_i, \quad a^i_i = 1, \tag{10}$$

men alle de andre $a^i_k = 0$, naar nemlig $i - k$ ikke har nogen af de tre Værdier 2, 1, 0.

3. Formlen (7) giver ligefrem for y_0, y_1, y_2, y_3 de ovenfor angivne Værdier; men den vil dernæst ogsaa give en hvilkensomhelst efterfølgende y_n, uden at man behøver at gaae tilbage til alle de forangaaende, saaledes som Beregningen ellers vilde udkræve ifølge Formlen (6). For $n = 0$ erholdes $y_0 = a_0 A + b_1 A^1$, men $A^1 = 0$, som overhoved $A^i_n = 0$ for $i > n$, og tillige $A = 1$, altsaa

$$y_0 = a_0.$$

For $n = 1$ erholdes $y_1 = a_0 A_1 + b_1 A^1_1$, men $A^1_1 = a = 1$ (ifølge den 3die (10) for $i = 0$), og ifølge den 1ste (8) $A_1 = -a^1$ d. e. (ifølge den 2den (10) for $i = 1$) $A_1 = a_1$, altsaa

$$y_1 = a_0 a_1 + b_1.$$

For $n = 2$ haves $y_2 = a_0 A_2 + b_1 A^1_2$, men ifølge (8)

$$A_2 = -\Sigma \pm a^2 a_1^1 = -a^2 a_1^1 + a^1 a_1^2 ,$$

$$A_2^1 = -\Sigma \pm a\, a_1^2 = -a\, a_1^2 + a_2 a^1 ,$$

d. e. ifølge (10)

$$A_2 = b_2 + a_1 a_2 , \quad A_2^1 = a_2 ,$$

altsaa

$$y_2 = a_0 a_1 a_2 + a_2 b_1 + a_0 b_2 .$$

For $n = 3$ haves $y_3 = a_0 A_3 + b_1 A_3^1$, hvor $A_3 = -\Sigma \pm a^3 a_1^1 a_2^2$, $A_3^1 = -\Sigma \pm a a_1^3 a_2^2$, eller

$$A_3 = -a^3 a_1^1 a_2^2 + a^3 a_1^2 a_2^1 + a^2 a_1^1 a_2^3 - a^1 a_1^2 a_2^3 + a^1 a_1^3 a_2^2 - a^2 a_1^3 a_2^1 ,$$

$$A_3^1 = -a\, a_1^3 a_2^2 + a\, a_1^2 a_2^3 + a^2 a_1^3 a_2 - a^3 a_1^2 a_2 + a^3 a_1 a_2^2 - a^2 a_1 a_2^3 ,$$

altaa med Udelukkelse af de forsvindende Led,

$$A_3 = a^2 a_1^1 a_2^3 - a^1 a_1^2 a_2^3 + a^1 a_1^3 a_2^2 , \quad A_3^1 = -a a_1^3 a_2^2 + a a_1^2 a_2^3 ,$$

d. e. ifølge (10)

$$A_3 = b_2 a_3 + a_1 a_2 a_3 + a_1 b_3 , \quad A_3^1 = b_3 + a_2 a_3 ,$$

altsaa

$$y_3 = a_0 a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 b_1 + a_0 a_3 b_2 + a_0 a_1 b_3 + b_1 b_3 .$$

For $n = 4$ blive A_4 og A_4^1 at bestemme. Den første af disse er

$$A_4 = -\Sigma \pm a^4 a_1^1 a_2^2 a_3^3 ,$$

men ved de forsvindende Leds Bortkastelse blive alene de Led tilbage, som ved Fortegnet og ved Permutationen af de fire Indices foroven ere saaledes bestemte:

$$+ (1,2,3,4) - (1,3,2,4) - (2,1,3,4) + (2,1,4,3) - (1,2,4,3) ,$$

altsaa ifølge (10)

$$A_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 b_3 a_4 + b_2 a_3 a_4 + b_2 b_4 + a_1 a_2 b_4 .$$

Ligesaa findes

$$A_4^1 = -\Sigma \pm a a_1^4 a_2^2 a_3^3 ,$$

som reduceres til Ledene:

$$- (0,2,3,4) + (0,3,2,4) + (0,2,4,3) ,$$

altsaa ifølge (10)

$$A_4^1 = a_2 a_3 a_4 + b_3 a_4 + a_2 b_4 .$$

Af A_4 og A_4^1 sammensættes $y_4 = a_0 A_4 + b_1 A_4^1$, hvorved det samme udkommer, som haves ifølge $y_4 = a_4 y_3 + b_4 y_2$.

4. Udtrykket (8) for A_n fremstilles beqvemmere ved at gaae ud fra en saadan Permutation af de foroven satte Indices, som ikke hører til noget af de forsvindende Led, f. Ex.

$$a^1 a^2_1 a^3_2 a^4_3 \ldots a^n_{n-1}.$$

Dette Led under Tegnet Σ har Fortegnet $+$ eller $-$, eftersom n—1 er lige eller ulige, saa at man kan sætte

$$A_n = (-1)^n \Sigma \pm a^1 a^2_1 a^3_2 \ldots a^n_{n-}\,. \qquad (11)$$

Ifølge Værdien $a^i_{i-1} = -a_i$ haves $a^1 a^2_1 a^3_2 \ldots a^n_{n-1} = (-1)^n a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$, hvorved igjen i A_n erholdes Ledet

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n. \qquad (12)$$

De andre Led i A_n svare til alle de Omsætninger i Indexrækken foroven i (11)

$$(1\ 2\ 3 \ldots n),$$

hvorved et eller flere af Tallene kommer til at bytte Plads med det forangaaende. Ved en saadan Ombytning forandres $a^q_{q-1} a^{q+1}_q$ til $-a^{q+1}_{q-1} a^q_q$, altsaa ifølge (10) til b_{q+1}. Fortegnet bliver altsaa i Resultatet uforandret, idet vel Ombytningen selv er forbunden med Tegnforandring, ifølge Loven for Determinanternes Dannelse, men dette hæves igjen ved Værdiernes Indsættelse ifølge (10). Herved skeer det, at alle Led i A_n erholde Fortegnet $+$ ligesom det ene Led (12), og at de kunne afledes af dette paa den Maade, at hvilkesomhelst af Factorerne a_2, a_3, ... a_n, enten enkeltviis eller flere samtidigen, gaae over fra a_q til b_q, idet tillige den forangaaende Factor a_{q-1} udgaaer. Man behøver altsaa blot istedetfor a at skrive b paa hvilkesomhelst Steder i Factorrækken (12), den første Factor undtagen, og med Iagttagelse af bagefter overalt at forandre $a_{q-1}\, b_q$ til b_q, derimod $b_{q-1}\, b_q$ til 0. Herved er Størrelsen A_n aldeles bestemt. F. Ex. man finder umiddelbart, for $n = 6$,

$$\begin{aligned} A_6 = {} & a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \quad + b_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ & + a_1 b_3 a_4 a_5 a_6 + a_1 a_2 b_4 a_5 a_6 + a_1 a_2 a_3 b_5 a_6 + a_1 a_2 a_3 a_4 b_6 \\ & + b_2 b_4 a_5 a_6 + b_2 a_3 b_5 a_6 + b_2 a_3 a_4 b_6 + a_1 b_3 b_5 a_6 + a_1 b_3 a_4 b_6 + a_1 a_2 b_4 b_6 \\ & + b_2 b_4 b_6\,. \end{aligned}$$

Ligesaa findes A_n^1 bestemt ved (8) men beqvemmere fremstillet ved

$$A_n^1 = (-1)^{n-1} \Sigma \pm a a_1^2 a_2^3 \ldots a_{n-1}^n. \qquad (13)$$

For dem her antydede Permutation

$$(0\,2\,3 \ldots n)$$

erholdes i Σ det Led $a a_1^2 a_2^3 \ldots a_{n-1}^n$, som ifølge (10) er $(-1)^{n-1} a_2 a_3 \ldots a_n$, hvoraf igjen følger for A_n^1 det Led

$$a_2 a_3 \ldots a_n. \qquad (14)$$

Da Index 0 foroven kun kan svare til 0 forneden, efterdi $a_i = 0$ for $i > 0$, og da a eller $a_0^0 = 1$, saa maae alle Ledene i A_n^1 kunne uddrages af det ene Led (14) ved at lade en eller flere Factorer a_q bliver til b_q, hvorefter a_{q-1} bortfalder, dog saaledes at a_2 ikke kan gjøres til b_2, efterdi $a a_1^2$ ved Omsætningen vilde blive $-a^2 a_1 = 0$. Reglen for at udlede A_n^1 af det ene Led (14) er altsaa den samme som for A_n udledt af (12). F. Ex.

$$\begin{aligned} A_6^1 = {} & a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 \\ & + b_2 a_4 a_5 a_6 + a_2 b_4 a_5 a_6 + a_2 a_3 b_5 a_6 + a_2 a_3 a_4 b_6 \\ & + b_3 b_5 a_6 + b_3 a_4 b_6 + a_2 b_4 b_6. \end{aligned}$$

5. Ved en nærmere Betragtning af den hele Samling af Led, hvoraf A_6 bestaaer, vil det kunne sees, hvad der iøvrigt er en nødvendig Følge af den Regel, hvorefter disse Led ere dannede, at de, som indeholde a_6, ikke udgjøre andet end $A_5 a_6$, eller ere dannede af $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5$ paa samme Maade som A_6 er dannet af $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$, men ved bagefter at tilsætte Factoren a_6. Ligeledes sees det, at de Led A_6, som indeholde b_6, hvori altsaa a_5 maa mangle, ere netop de samme, som efter Regelen maatte udledes af $a_1 a_2 a_3 a_4$, kun med Tilføielse af Factoren b_6, d. e. disse Led tilsammen ere $A_4 b_6$. Altsaa haves

$$A_6 = a_6 A_5 + b_6 A_4.$$

Paa lignende Maade bestaaer A_6^1 af to Slags Led, hvori respective a_6 og b_6 indgaaer, saaledes at

$$A_6^1 = a_6 A_5^1 + b_6 A_4^1.$$

Denne Lov indsees at være almindeligt gjældende, saa at

$$A_n = a_n A_{n-1} + b_n A_{n-2}, \quad A_n^1 = a_n A_{n-1}^1 + b_n A_{n-2}^1.$$

Heraf følger, at naar y_n bestemmes ved Formlen (7), ligesaa y_{n-1} og y_{n-2}, saa vil Ligning (6) blive opfyldt. Det kan endvidere bemærkes, at de to Classer af Led, hvori y_n deles ifølge Formlen (7), kunne samles i en eneste Classe af Led, udviklede af det enkelte Led

$$a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \tag{15}$$

ved at følge nøiagtigt den samme Regel, efter hvilken A_n er bleven dannet af det enkelte Led (12) og A_n^1 af Ledet (14). Alle de Led uddragne af (15), i hvilke a_0 indeholdes, maae nemlig blive de samme som Ledene afledte af (12) ved bagefter at tilsætte Factoren a_0, ligesom ogsaa de Led, som mangle a_0, blive alle de Led, som kunne uddrages af (15) ved Forandring af a_1 til b_1. Man har følgelig

$$y_n = \Sigma a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n, \tag{16}$$

hvor Summen Σ dannes af alle de Led, som fremkomme deels af den uforandrede Størrelse (15), som selv er et af Ledene, deels af dem, som fremgaae af (15), idet hvilkesomhelst af Factorerne $a_1 a_2, \ldots a_n$ forandres til b med samme Index, forsaavidt det iagttages, at enhver saadan Forandring stedse lader den forangaaende Factor bortgaae, saa at ingensinde to Factorer b kunne have Indices følgende umiddelbart efter hinanden (som $b_q b_{q+1}$). Efter den Maade, hvorpaa den convergerende Brøks Nævner z_n er bestemt af y_{n-1} (Art. 2), haves ogsaa

$$z_n = \Sigma a_1 a_2 a_3 \ldots a_n, \tag{17}$$

hvor Σ er at forstaae paa samme Maade som i (16), altsaa med Hensyn til Forandringen af hvilkesomhelst af Factorerne $a_2, a_3, \ldots a_n$ til b med samme Index, idet den anførte Betingelse iagttages.*) Følgelig ere y_n og z_n ogsaa bestemte som Summerne af alle de hele Led i Udviklingerne af

---

*) Jvf. *Euler*, Specimen algorithmi singularis (Novi Com. Ac. Petrop. T. IX, pag. 53); *Gergonne*, (Annales de math., T. I, pag. 262). *Stern*, Theorie

$$a_0a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{b_1}{a_0\,a_1}\right)\left(1+\frac{b_2}{a_1\,a_2}\right)\left(1+\frac{b_3}{a_2\,a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{b_n}{a_{n-1}\,a_n}\right),$$

$$a_1a_2\ldots a_n\left(1+\frac{b_2}{a_1\,a_2}\right)\left(1+\frac{b_3}{a_2\,a_3}\right)\ldots\left(1+\frac{b_n}{a_{n-1}\,a_n}\right).$$

6. Antallet af Ledene i y_n være betegnet ved P_n. Ifølge den Lov, udtrykt ved (6), som bestemmer y_n af de to foregaaende y_{n-1} og y_{n-2}, haves

$$P_{n+2}=P_{n+1}+P_n. \tag{18}$$

Ved at gaae ud fra $P_0=1$, $P_1=2$, erholdes successive P_3, P_4, P_5, ..., nemlig

$$P_0=1, P_1=2, P_2=3, P_3=5, P_4=8, P_5=13, P_6=21, P_7=34 \ldots$$

Loven herfor kan let findes og fremstilles under forskjellige Former. Ved Integration af Differentsligningen (18) erholdes

$$P_n=C\alpha^n+C^1\beta^n,$$

hvor α og β betegne Rødderne i Ligningen $x^2-x-1=0$, og C og C^1 ere vilkaarlige Constanter. Man har

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

og ifølge $P_0=1$, $P_1=2$, er

$$C+C_1=1,\ \tfrac{1}{2}(C+C^1)+\frac{\sqrt{5}}{2}(C-C^1)=2,$$

altsaa $C-C^1=\frac{3}{\sqrt{5}}$. Heraf følger

$$C=\frac{\sqrt{5}+3}{2\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$C^1=\frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Altsaa

$$P_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right] \tag{19}$$

---

der Kettenbrüche (Crelles Journal 10de Bd. pag. 5 o. ff.): *Öttinger*, Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen (Crelles Journal, 49de Bd. pag. 66 o. ff.).

eller ved Udvikling ifølge Binomialformlen

$$P_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{n+2}{1} + \frac{(n+2)(n+1)n}{1.2.3}5 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4.5}5^2 + \ldots\right]. \quad (20)$$

Et andet Udtryk erholdes ved at bestemme y_n for det Tilfælde, hvor alle Størrelserne a_0, a_1, a_2, ... ere ligestore, ligeledes b_1, b_2, ... ligestore. Man sætte nemlig

$$a = a_0 = a_1 = a_2 = \ldots, \; b = b_1 = b_2 = b_3 = \ldots \quad (21)$$

og betegne ved u_n den dertil svarende Værdie af y_n, hvorefter P_n erholdes som det, hvortil u_n reduceres, naar $a = b = 1$. Ifølge (6) haves

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \quad (22)$$

samt $u_0 = a$, $u_1 = a^2 + b$. Deraf udledes successive u_2, u_3, u_4, ..., nemlig: $u_0 = a$, $u_1 = a^2 + b$, $u_2 = a^3 + 2ab$, $u_3 = a^4 + 3a^2b + b^2$, $u_4 = a^5 + 4a^3b + 3ab^2$, $u_5 = a^6 + 5a^4b + 6a^2b^2 + b^3$, $u_6 = a^7 + 6a^5b + 10a^3b^2 + 4ab^3$, ...

Loven herfor bestemmes let ved Integration af Differentsligningen (22), hvilket giver almindeligt

$$u_n = C\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^n + C'\left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^n,$$

altsaa, idet C og C' bestemmes ifølge Værdierne af u_0 og u_1,

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 4b}}\left[\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2}\right)^{n+2}\right]. \quad (23)$$

Dette udvikles igjen let ved Binomialformlen, men Rækken, hvoraf (20) erholdes ved at sætte $a = b = 1$, er da ikke ordnet efter Potentser af a og b, saaledes som de angivne specielle Værdier u_0, u_1, u_2, ... u_6. Disse ere indbefattede i følgende Formel, som let bevises a posteriori eller ved Induction, idet Ligning (22) er tilfredsstillet samt u_0 og u_1 erholdes for $n = 0$ og $n = 1$:

$$u_n = \left\{\begin{array}{l} a^{n+1} + \frac{n}{1} + a^{n-1}b \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} a^{n-3}b^2 + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3} a^{n-5}b^3 + \ldots \\ \qquad + \frac{(n-r+1)(n-r)\ldots(n-2r+2)}{1.2\ldots r} a^{n-2r+1}b^r + \ldots, \end{array}\right\} \quad (24)$$

det sidste Led bestemt for $r = \frac{n}{2}$, hvis n er lige, og $r = \frac{n+1}{2}$, hvis n er ulige. Da y_n bestemt ved (16) reduceres til dette Udtryk (24), saasnart Ligningerne (21) finde Sted, saa følger, at Udtrykket (24) ikke blot ved at sætte $a = b = 1$ fremstiller hele Antallet P_n af Led i y_n, men tillige at Coefficienterne

$$1, \frac{n}{1}, \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}, \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}, \ldots$$

fremstille Antallene af de forskjellige Slags af Led i y_n. Det vil netop findes, at et enkelt Led i y_n ikke indeholder b, at n Led indeholde b paa et enkelt Sted, at $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$ Led indeholde b paa to Steder o. s. v. Dette følger af den Regel, hvorefter disse Led dannes ved en Udledelse af det enkelte Led (15), hvori b ikke findes. De Led, som indeholde b paa en enkelt Plads, ere i Antal n, thi de kunne fremkomme af ethvert af de n Led $a_1, a_2, \ldots a_n$ ved Forandringen af a til b. Skal b findes paa to Steder, maae to Factorer a gjøres til b, hvilket er muligt for følgende Combinationer:

$$\begin{array}{rrrl}
a_1a_3, & a_1a_4, & a_1a_5, & \ldots\ a_1a_n, \\
 & a_2a_4, & a_2a_5, & \ldots\ a_2a_n, \\
 & & a_3a_5, & \ldots\ a_3a_n, \\
 & & & \quad \vdots \\
 & & & a_{n-2}a_n,
\end{array}$$

hvis Antal er $(n-2)+(n-3)+(n-4)\ldots+1 = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$. Skal b findes paa tre Steder, saa kan dette skee 1º ved at gjøre a_1 til b_1 og derefter lade b indgaae paa to Steder i Rækken $a_3, a_4, \ldots a_n$, hvilket ifølge det nylig fundne kan skee ved $\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}$ Combinationer; 2º ved at gjøre a_2 til b_2 samt lade b indgaae paa to Steder i Rækken $a_4, a_5, \ldots a_n$, hvilket giver $\frac{(n-4)(n-5)}{1.2}$ Combinationer; o. s. v. Den sidste Combination er $a_{n-4}a_{n-2}a_n$, som er enkelt eller svarer til $\frac{2.1}{1.2}$. Altsaa vil overhoved Antallet af Led, som indeholde b paa tre Steder, være bestemt ved

$$\frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \frac{(n-4)(n-5)}{1.2} + \frac{(n-5)(n-6)}{1.2} \dots + \frac{2.1}{1.2} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}.$$

Ligesaa vil Coefficienten for $a^{n-7}\,b^4$ i Rækken (24) netop findes som Antallet af Led indeholdende b paa fire Steder o. s. fr. Almindeligt vil Coefficienten for $a^{n-2r+1}b^r$ i Rækken (24) angive, hvor mange Led i y_n det er, som have b paa r Steder, altsaa a paa $n-2r+1$ Steder, idet de $n+1$ Factorer a i Ledet (15) reduceres til $n+1-2r$ formedelst de r Factorer a, som forandres til b, og formedelst den forangaaende Factor paa ethvert af de r Steder, eftersom denne forangaaende Factor udgaaer. Betegnes den nævnte Coefficient ved $C_{n,r}$, altsaa

$$C_{n,r} = \frac{(n-r+1)(n-r)\dots(n-2r+2)}{1.2\dots r}, \qquad (25)$$

saa vil denne Coefficients angivne Betydning være almindeligt godtgjort ved blot at bemærke den bekjendte Summation*):

$$C_{n-2,\,r-1} + C_{n-3,\,r-1} + C_{n-4,\,r-1} \dots + C_{2r-3,\,r-1} = C_{n,r}, \qquad (26)$$

hvor det sidste Led $C_{2r-3,\,r-1} = \dfrac{(r-1)(r-2)\dots 1}{1.2\dots(r-1)} = 1.$

7. Størrelsen u_n, bestemt ved Udtrykket (23) eller (24), kan tjene til at finde Værdien af den endelige Kjædebrøk

$$a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cdot \\ \cdot + \cfrac{b}{a}}}$$

hvor b forekommer n Gange, a følgelig $n+1$ Gange. Da nemlig Ligningerne (21) lade y_n blive reduceret til u_n, saa maa ogsaa z_n blive til u_{n-1}, saa at den nøiagtige Værdie af denne Kjædebrøk er bestemt ved $\dfrac{u_n}{u_{n-1}}$. Man kan forlænge denne Kjæde-

*) Om denne Summation s. Forfatterens *Elementær Algebra*, Kbh. 1855, pag. 261.

brøk ved et Led enten i Begyndelsen eller i Enden, d. e. man har

$$a + \frac{b}{\frac{u_n}{u_{n-1}}} = \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

hvilken Ligning ogsaa haves ifølge (22). Betegnes ved α og β Rødderne i Ligningen

$$x^2 - ax - b = 0,$$

saa er ifølge (23)

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}},$$

som er en symmetrisk Function af α og β og kan følgelig ogsaa findes ved de Methoder, som derfor haves i Ligningernes Theorie. Det samme gjælder om selve Størrelsen u_n; thi man har ifølge (23)

$$u_n = \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \alpha^{n+1} + \alpha^n\beta + \alpha^{n-1}\beta^2 \ldots + \alpha\beta^n + \beta^{n+1},$$

som kan findes ved Hjælp af Størrelserne $s_p = \alpha^p + \beta^p$, nemlig

$$u_n = s_{n+1} + \alpha\beta s_{n-1} + \alpha^2\beta^2 s_{n-3} + \ldots,$$

hvilken Række ender med $(\alpha\beta)^{\frac{n}{2}} s_1$ eller med $(\alpha\beta)^{\frac{n-1}{2}} s_2 + (\alpha\beta)^{\frac{n+1}{2}}$, eftersom n er lige eller ulige. Det vilde være let paa denne Maade atter at komme til Udtrykket (24).

8. Den speciellere Form af Kjædebrøker, som anvendes i Algebra, er den, som haves for

$$1 = b_1 = b_2 = b_3 = \ldots, \tag{27}$$

idet tillige a_0, a_1, a_2, ... ere hele positive Tal. Den Reduction, som Udtrykket (16) undergaaer formedelst Ligningerne (27), bestaaer deri, at da enhver Factor b_q udgaaer og den forangaaende a_{q-1} allerede manglede, maae de forskjellige Led i Summen Σ dannes af det første Led $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ ved paa hvilkesomhelst Steder at udskyde to paa hinanden følgende Factorer, nemlig 1° en enkelt af disse:

$$a_0 a_1,\ a_1 a_2,\ a_2 a_3,\ \ldots\ a_{n-2} a_{n-1},\ a_{n-1} a_n, \tag{28}$$

hvorved erholdes følgende Led i Antal n:

$$a_2 a_3 \ldots a_n + a_0 a_3 \ldots a_n + a_0 a_1 a_4 \ldots a_n + \ldots + a_0 a_1 a_2 \ldots a_{n-2}.$$

2º erholdes Led i Antal $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}$, hvor fire Factorer i det oprindelige Led $a_0 a_1 \ldots a_n$ ere udskudte saaledes, at af de n Producter (28) hvilkesomhelst to, der ikke have nogen fælleds Factor, udgaae. Disse Led ere

$$a_4 a_5 \ldots a_n + a_2 a_5 \ldots a_n + \ldots a_2 a_3 \ldots a_{n-2} + a_0 a_5 \ldots a_n + \ldots + a_0 a_1 \ldots a_{n-4}.$$

3º forekomme $\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3}$ Led, som mangle sex forskjellige Factorer ved Udskydelse af hvilkesomhelst tre af de samme n Produkter (28), idet de tre udskudte Produkter ikke have nogen fælleds Factor, altsaa

$$a_6 \ldots a_n + a_4 a_5 a_8 \ldots a_n \ldots\ldots + a_0 a_1 \ldots a_{n-6},$$

o. s. v. Er n et lige Tal, vil man tilsidst have de enkelte Led i Antal $C_{n,\frac{n}{2}} = \frac{n}{2} + 1$:

$$a_0 + a_2 + a_4 + a_6 \ldots\ldots + a_n;$$

men er n ulige, erholdes tilsidst Ledene

$$a_0 a_1 + a_0 a_3 + \ldots + a_0 a_n + a_2 a_3 + \ldots + a_2 a_n + \ldots + a_{n-1} a_n + 1,$$

af hvilke $a_0 a_1 + \ldots + a_{n-1} a_n$ ere i Antal $C_{n,\frac{n-1}{2}} = \frac{\frac{n+3}{2} \cdot \frac{n+1}{2}}{1.2}$, og det enkelte Led 1 er i Antal $C_{n,\frac{n+1}{2}} = 1$. Alle de Led, hvoraf y_n saaledes kommer til at bestaae, hvad enten n er lige eller ulige, kunne charakteriseres derved, at de fremkomme, idet et hvilketsomhelst lige Antal af Factorer i det fuldstændige Led $a_0 a_1 a_2 \ldots a_n$ udskydes med den Indskrænkning, at den første Factor i Ledet har lige Index og at hvilkesomhelst to paa hinanden følgende Factorer have Indices, hvis Differents er et ulige Tal. Da z_n erholdes ved i y_{n-1} at forøge alle Indices ved en Enhed, vil den næstefter det fuldstændige Led $a_1 a_2 \ldots a_n$ bestaae af lutter Led dannede ved Udskydning af et eller flere af disse Produkter:

$$a_1a_2,\ a_2a_3,\ a_3a_4, \ldots a_{n-2}a_{n-1},\ a_{n-1}a_n, \qquad (29)$$

men saaledes at de forskjellige udskudte Produkter ikke have nogen fælleds Factor. Altsaa komme disse Led til alle at begynde med en Factor, som har ulige Index, og iøvrigt vil, ligesom i y_n, to paa hinanden følgende Factorer stedse have Indices, hvis Differents er ulige. Det vil derfor nu være tilstrækkeligt at tilføie, at z_n, naar n er et lige Tal, maa ende med Ledene

$$a_1a_2 + a_1a_4 + \ldots + a_1a_n + a_3a_4 + \ldots + a_3a_n + \ldots + a_{n-1}a_n + 1,$$

af hvilke $a_1a_2 + \ldots + a_{n-1}a_n$ ere i Antal $C_{n-1,\frac{n-2}{2}} = \dfrac{\frac{n+2}{2} \cdot \frac{n}{2}}{1 \cdot 2}$ og det enkelte Led 1 i Antal $C_{n-1,\frac{n}{2}} = 1$, derimod at z_n, naar n er et ulige Tal, maa ende med Ledene

$$a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_n$$

i Antal $C_{n,\frac{n-1}{2}} = \dfrac{n+1}{2}$.

9. Den foregaaende Undersøgelse har viist, hvorledes Determinanterne med Fordeel kunne benyttes til at bestemme den almindelige Lov, som ligger til Grund for de convergerende Brøkers umiddelbare Dannelse af Ledene i den tilsvarende Kjædebrøk. Det vil heraf ogsaa indsees, at man paa lignende Maade kan komme til Bestemmelsen af enhver anden Function, som skal tilfredsstille en lineær Differentsligning af hvilkensomhelst Orden istedetfor Ligning (6) af 2den Orden, som var den, der her forelaae. Med Hensyn til saadanne Ligninger ville Determinanterne paa en mere directe og en endnu mere simpel Maade kunne komme til Nytte end f. Ex. de saakaldte »combinaisons discontigues«, som *Binet* saa sindrigen har udfundet og bragt i Anvendelse (Mém. de l'acad. des sc., T. IX, Paris 1845).